Πεπερασμένες διαφορές για το πρόβλημα δυο σημείων με περιοδικές συνοριακές συνθήκες

Διατύπωση του προβλήματος

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις q και f μπορούν να επεκταθούν περιοδικά στο $\mathbb{R}$ ως συνεχείς συναρτήσεις με περίοδο $b-a$, δηλαδή $q(b)=q(a)$ και $f(b)=f(a)$.

Έστω πραγματικοί αριθμοί $a,\ b$ με $a<b$. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα δυο σημείων: αναζητάμε μια $(b-a)-$περιοδική συνάρτηση $y\in C(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε

$$-y''(x)+q(x)y(x)=f(x), \quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Μπορεί να δειχθεί ότι αν $q(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $q\not\equiv 0$, τότε το πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

Περιγραφή της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών

Έστω N φυσικός αριθμός που δίνεται από το χρήστη. Ορίζουμε το πλάτος της διαμέρισης $h:=\frac{b-a}{N}$ για το διάστημα $[a,b]$. Οι αντίστοιχοι κόμβοι ορίζονται ως εξής: $x_j=a+jh$, για $j\in\mathbb{Z}$.

Ορίζουμε

$$\mathbb{R}^N_{per}=\{V=(V_i)_{i\in\mathbb{Z}}\ :\ V_i\in\mathbb{R}, \quad \text{and} \quad V_{i+N}=V_i, \quad i\in\mathbb{Z}\}$$

Συμβολίζουμε με y^j την προσέγγιση της $y(x_j)$ για $j=0,\ldots,N$. Κατασκευάζουμε προσεγγίσεις y^j για την προσέγγιση των τιμών $y(x_j)$.

Για να προσεγγίσουμε την $y''(x)$ στα σημεία $x_j,\ j=0,\ldots,N-1$, χρησιμοποιούμε την κεντρική διαφορά για την προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου, την $\delta^c_{h,2}$.

Συνεπώς, θα έχουμε

$$-\frac{y^{j-1}-2y^j+y^{j+1}}{h^2}+q(x_j)y^j=f(x_j), \quad j=0,\ldots,N-1.$$

Η περιοδικότητα των q και f θα έχει ως αποτέλεσμα η παραπάνω εξίσωση να ισχύει για όλα τα $i \in \mathbb{Z}$. Οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν ένα γραμμικό σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους, όπου θέτουμε $y^{-1} = y^{N-1}$ και $y^0 = y^N$.

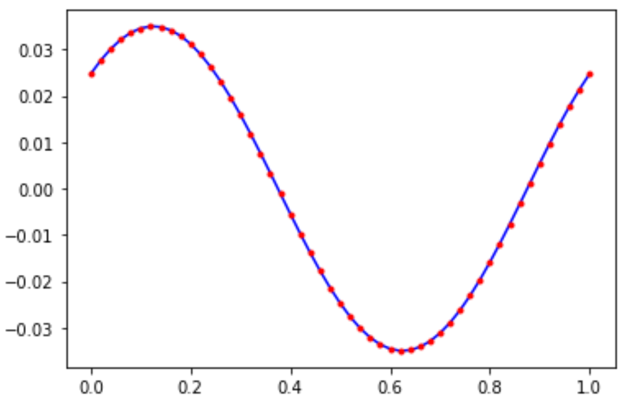
Άσκηση 1: Αν συμβολίσουμε με $Y \in \mathbb{R}^{N+1}$ το διάνυσμα με συνιστώσες $y^0, \ldots, y^N$, δηλαδή $Y = (y^0, \ldots, y^N)^T$, βρείτε το γραμμικό σύστημα που ορίζουν οι παραπάνω εξισώσεις και βεβαιωθείτε οτι έχει μοναδική λύση. Παρατηρήστε ότι ο πίνακας είναι τριδιαγώνιος.

Άσκηση 2: Έστω $y(x) = \frac{\cos(2\pi x)+\sin(2\pi x)}{1+4\pi^2}$ λύση του προβλήματος

$$-y''(x) + y(x) = \cos(2\pi x) + \sin(2\pi x), \quad \forall\, x \in [0, 1],$$
$$y(0) = y(1).$$

Θεωρήστε $N = 50$ και κατασκευάστε τις προσεγγίσεις που δίνει η παραπάνω μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών και κατασκευάστε το γράφημα της προσεγγιστικής μαζί με την ακριβή λύση.

In [2]:



Πειραματική τάξη σύγκλισης

Γνωρίζουμε ότι αν $y \in C^4[a, b]$, τότε το σφάμλα της παραπάνω μεθόδου πεπερασμένων διαφορών ικανοποιεί την

$$\max_{0\le i\le N} |y^i - y(x_i)| \le Ch^2.$$

Υπολογίζοντας το σφάλμα

$$\mathcal{E}(N) = \max_{0\le i\le N} |y^i - y(x_i)|,$$

για δυο διαφορετικές διαμερίσεις με $N_1 < N_2$, η πειραματική τάξη σύγκλισης ορίζεται ως

$$p = \frac{\ln\left(\frac{\mathcal{E}(N_2)}{\mathcal{E}(N_1)}\right)}{\ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}$$

Άσκηση 3: Θεωρήστε το διάνυσμα $N = [100, 200, 400]$, υπολογίστε τα σφάλματα $\mathcal{E}(N)$ και βρείτε τους λόγους που χρησιμοποιούμε για την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών.

In [3]:

```
The error is : [1.12066039e-05 2.80263622e-06 7.00634188e-07]
The order convergence is : [1.99949274 2.0000512 ]
```